

望ましいクラス三役選出ルールの提案¹

2016年11月

慶應義塾大学 坂井豊貴研究会

石田純子、鈴木智博、前田凌佑、松井勇樹、横山領²

概要

誰しも、クラス等で代表・副代表・書記のような役職決めを行ったことはあるだろう。しかし、一つの役職に複数の者が立候補した場合の選出方法には、我々が当たり前に使っている手法であっても、立候補者やクラス全体の意思にとって望ましい結果がもたらされない可能性がある。そこで本稿では、一般的に用いられる手法の性質や問題点を、立候補者と役職のマッチングという視点から分析し、改善案としてDAアルゴリズムによる選出ルール、中でも立候補者側DAアルゴリズムによる選出ルールを提案する。DAアルゴリズムにおいて提案する側は虚偽申告のインセンティブを持たない。立候補者側DAアルゴリズムにおいては役職側に戦略的操作の余地を残すが、役職の選好は集団による意思決定によって行われるため戦略的操作の可能性は低いと考えられる。本稿では、マッチングにおける役職の選好をおおよそ民主的な集約ルールによって得られた社会的順序によって決まるとし、集約ルールを使う際の投票対象の範囲まで言及した。ここに、本稿の新規性があるといえるだろう。

¹ 本論文を書くうえで坂井豊貴教授や研究会の先輩方から多くのご指導をいただいた。感謝の意をここに表す。なお、本論文の内容に対する責任は全て筆者らに帰する。

² 経済学部3年

目次

1章 はじめに

2章 基本設定

2.1 マッチングの記号と定義の設定

2.2 望ましさの基準の設定

3章 一般的に用いられている選出ルールとその性質

3.1 一人一役立候補制

3.2 落選者再立候補制

4章 新しい選出ルールの提言

4.1 DA アルゴリズム選出ルール

4.2 DA アルゴリズムの望ましい点

4.3 どちら側の DA アルゴリズムを使うべきか

5章 選出ルールの比較

6章 Priority Ordering について

6.1 投票対象の違いによるマッチングへの影響

6.2 ダミー立候補者を投票対象に含めるべきか

7章 おわりに

参考文献

1章 はじめに

本論文は、筆者が実際に体験した以下のエピソードから話を進める。

私が、小学生のころ、次のようなことがあった。私が在籍していたクラスで、クラス三役(代表、副代表、書記)を選ぶことになった。使われた選出ルールは以下のようなものだ。三役に就きたい生徒は、いずれかの役一つを選択し、立候補する。複数の役職に立候補することはできない。同じ役に複数名立候補した場合、クラス全員による選挙で決める。特に三役に惹かれることのなかった私は、クラスの一個人として選挙を見守った。

先生が立候補を呼び掛けた結果、以下の4人が各役に立候補した。

代表：堀江君、山田君

副代表：太田君

書記：加藤君

堀江君と山田君が対立する代表についてのみ選挙が行われた。山田君も堀江君もクラスメートから特に信頼されている人だった。選挙の結果、堀江君が代表に僅差で当選した。また、副代表には太田君が、書記には加藤君が就くことになった。

ここで私は次のような疑問を抱いた。山田君は、代表以外の役に立候補すればよかったのではないか。代表の選挙では負けてしまったが、山田君もクラスの人望を集めていた。おそらく副代表か書記に立候補すれば勝てただろう。実際、山田君は副代表への出馬も検討していた。太田君より山田君のほうが副代表にふさわしいと考えていた私にとっては、釈然としない三役決めとなった。

山田君が堀江君に選挙で勝てないということを予想できなかったのが悪いのだろうか。山田君は代表になりたいという気持ちに嘘をついて副代表に立候補すべきだったのだろうか。いや、むしろ三役の選出ルール自体の性能に問題があるのではないだろうか。一般的に用いられている方法が導き出す結果はどのようなもので、そこにある問題点を改善する選出ルールはどのようなものか。そうした問題意識から、本論文によって最も望ましい三役選出ルールの提案を行う。

2章 基本設定

2.1 マッチングの記号と定義の設定

三役の選出方法は、立候補者と役職の「マッチング」と考えることができる。中でも本論文では立候補者の選好と、立候補に対する社会的順序に着目して論じる。

まず基本設定として、 m 人からなる立候補者の集合を $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ とし、役職の集合を $R = \{r_1, r_2, r_3\}$ とする。ここでは、 r_1 :代表 r_2 :副代表 r_3 :書記とする。

立候補者 s_i の役職への選好を \succsim_{s_i} と表す。例えば $\succsim_{s_k}: r_1 r_2 \emptyset r_3$ とは、 s_k が r_1 (代表)、 r_2 (副代表)、 \emptyset (無職)、 r_3 (書記) という順序で選好を持っていることを表している。

役職 r_j の立候補者への選好を \succsim_{r_j} と表す。これは、有権者の立候補者に対する社会的順序を示す。これを有権者の **priority ordering** と呼ぶことにする。これは、おおよそ民主的であろう集約ルールでの選挙によって決まるものとする³。例えば $\succsim_{r_1}: s_1 s_2 s_3 \emptyset$ とは、有権者は、役職 r_1 に $s_1 s_2 s_3 \emptyset$ という順で就任してほしいことを表している。ただし、すべての役職の選好について、 $s_i \succ_{r_j} \emptyset$ を仮定する。つまり、役職側が「この立候補者なら、役職に人がいないほうがまだよい」ということがないものとする。言い換えれば、「誰も役職につかない」ことは、いかなる候補者がその役職に就くことよりも望ましくないということである。

マッチング μ において立候補者 s_i が就いた役職を $\mu(s_i) \in R$ と表す。もし立候補者 s_i がどの役職についていなければ $\mu(s_i) = \emptyset$ と表す。マッチング μ において役職 r_j に就いた立候補者を $\mu(r_j) \in S$ と表す。もし役職 r_j にだれにもついていなければ $\mu(r_j) = \emptyset$ と表す。以上の定義より $\mu(s_i) = r_j \Leftrightarrow \mu(r_j) = s_i$ は自明である。

マッチングルールとは参加者の選好組

$$\succsim = (\succsim_{s_1}, \succsim_{s_2}, \dots, \succsim_{s_m}, \succsim_{r_1}, \succsim_{r_2}, \succsim_{r_3})$$

に対してマッチング $F(\succsim) = \mu$ を与える関数であり、そのもとで任意の立候補者 s_i についてのマッチングを

$$F s_i(\succsim) = \mu(s_i)$$

役職 r_j についてのマッチングを

$$F r_j(\succsim) = \mu(r_j)$$

と表す。

2.2 望ましさの基準の設定

以上の設定を用いて、マッチングルールを考える上で望ましさの基準とする性質を以下のように定義する。

³ 例えば、役職 r_1 に s_1, s_2, s_3 の三人が立候補し、多数決を用いた選挙で s_1 :10 票、 s_2 :4 票、 s_3 :15 票を獲得したとする。そのとき、 r_1 の選好は、 $\succsim_{r_1}: s_3 s_1 s_2 \emptyset$ となる。詳しくは、6章を参照。

• 立候補者個人合理性

あるマッチング μ が立候補者個人合理的であるとは、すべての立候補者にとって、出馬することが不利益にならないマッチングが成立することである。つまりすべての立候補者 s_i について、 $\mu(s_i) \succeq_{s_i} \emptyset$ が成り立つマッチングである。

• 役職個人合理性

あるマッチング μ が役職個人合理的であるとは、すべての役職にとって、立候補者を募集することが不利益にならないマッチングが成立することである。つまりすべての立候補者 r_j について、 $\mu(r_j) \succeq_{r_j} \emptyset$ が成り立つマッチングである。

• 個人合理性

あるマッチング μ が個人合理的であるとは、立候補者個人合理性と役職個人合理性の両方を満たすことである。

• 安定性

マッチング μ がすべての立候補者と役職の選好組 \succ のもとで安定的とは、 μ が個人合理性を満たし、かつ μ をブロックするペアが存在しないことを意味する。ここで、 μ をブロックするペアが存在しないとは、次の条件を満たす立候補者と役職のペア (s_i, r_j) が存在しないことをいう。

$$s_i \succ_{r_j} \mu(r_j) \text{ かつ } r_j \succ_{s_i} \mu(s_i)$$

つまり、安定性が満たされているマッチングは立候補者と役職が、ペアから逸脱する誘因を持たない。さらに、安定的なマッチングは必然的に効率性を満たすことが知られている。立候補者側、役職側どちらの選好 \succ も尊重すべきであり、非効率的なマッチングは望ましくない。

• 立候補者側耐戦略性

あるマッチングルールが立候補者側耐戦略性を満たすとは立候補者 s_i の真の選好を \succeq_{s_i} 、他者の選好組を \succeq_{-s_i} と表すとき、いかなる選好 $\succeq'_{s_i} \neq \succeq_{s_i}$ について

$$F_{s_i}(\succeq_{s_i}, \succeq_{-s_i}) \succeq_{s_i} F_{s_i}(\succeq'_{s_i}, \succeq_{-s_i})$$

が常に成り立つことである。つまり、立候補者側耐戦略性が満たされるマッチングルールでは立候補者が虚偽申告などの戦略的操作を行うインセンティブをもち、立候補者は自分の真の選好に基づいて申告することが支配戦略となる。戦略的操作自体は悪いことではない。しかし、立候補者に戦略的操作を行うインセンティブがある場合、マッチングの結果が非効率的になる恐れがある。

• 役職側耐戦略性

あるマッチングルールが役職側耐戦略性を満たすとは、役職 r_j の真の選好を \succeq_{r_j} 、他者の選好組 \succeq_{-r_j} と表すとき、いかなる選好 $\succeq'_{r_j} \neq \succeq_{r_j}$ について

$$F_{r_j}(\succeq_{r_j}, \succeq_{-r_j}) \succeq_{r_j} F_{r_j}(\succeq'_{r_j}, \succeq_{-r_j})$$

が常に成り立つことである。つまり、役職側耐戦略性が満たされるマッチングルールでは役職が虚偽申告などの戦略的操作を行うインセンティブをもち、役職は自分の真の選好に基づいて行動することが支配戦略となる。戦略的操作自体は悪いことではない。しかし、役職に、すなわち社会的順序に戦略的操作が行われるインセンティブがある場合、マッチングの結果が非効率的になる恐れがある。

3章 一般的に用いられている選出ルール

3.1 一人一役立候補制

「三役に就きたい生徒は、いずれかの役一つを選択し立候補する」という制度を一人一役立候補制と呼ぶことにする。この制度のもとでは複数の役職に立候補することはできない。また、同じ役に複数立候補した場合、クラス全員での選挙によって役職に就く者を決める。

例 3.1 それぞれ立候補者、役職の選好が以下の通りだったとする。⁴

$$\begin{array}{ll} \succ_{s_1}: r_1 r_2 r_3 \emptyset & \succ_{r_1}: s_1 s_2 s_3 s_4 \emptyset \\ \succ_{s_2}: r_1 r_2 r_3 \emptyset & \succ_{r_2}: s_1 s_2 s_3 s_4 \emptyset \\ \succ_{s_3}: r_2 r_1 r_3 \emptyset & \succ_{r_3}: s_2 s_3 s_4 s_1 \emptyset \\ \succ_{s_4}: r_3 r_2 r_1 \emptyset & \end{array}$$

ここで一人一役立候補を使い、立候補者4人が正直に選好を表明し、立候補したとすると次のようになる。

ステップ1 s_1 と s_2 は、一番就きたい役職 r_1 に立候補する。

s_3 は、一番就きたい役職 r_2 に立候補する。

s_4 は、一番就きたい役職 r_3 に立候補する。

ステップ2 r_1 にとって、 s_1 のほうが s_2 より望ましいので、 $\mu(r_1)=s_1$ となる

r_2 にとって、 s_3 のほうが \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_2)=s_3$ となる。

r_3 にとって、 s_4 のほうが \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_3)=s_4$ となる。

s_2 は、役職に就くことができなかったので、 $\mu(s_2) = \emptyset$ となる。

立候補者と役職の組み合わせは、 (s_1, r_1) 、 (s_3, r_2) 、 (s_4, r_3) となった。以上でステップは終了となる。

この選出ルールが、個人合理性を満たすことは自明である。しかし、この選出ルールは安定性、立候補者側耐戦略性を満たさないことを以下で示す。

定理 3.11 一人一役立候補制は、安定性を満たさない。

証明. 安定性を満たさないことを示すには、 $s_i \succ_{r_j} \mu(r_j)$ かつ $r_j \succ_{s_i} \mu(s_i)$ となるペアが存在することを示せばよい。上の例において、 (s_2, r_2) は、 $s_2 \succ_{r_2} \mu(r_2)$ かつ $r_2 \succ_{s_2} \mu(s_2)$ となるペアである。よって、一人一役立候補制は、安定性を満たさない。

定理 3.12 一人一役立候補制は、立候補者側耐戦略性を満たさない。

証明. 一人一役立候補制が立候補者側耐戦略性を満たさないことを示すには、ある立候補者 s_i 、その真の選好 \succ_{s_i} 、他者の選好組 \succ_{-s_i} 、ある偽の選好 $\succ'_{s_i} \neq \succ_{s_i}$ について

⁴ s_1 :堀江君 s_2 :山田君 s_3 :太田君 s_4 :加藤君とすれば、2章で紹介した筆者の体験談に当てはめて考えることができる。

$$F_{s_i}(\succ_{s_i}, \succ_{-s_i}) <_{s_i} F_{s_i}(\succ'_{s_i}, \succ_{-s_i})$$

が成り立つこと示せばよい。いま s_2 が真の選好 $\succ_{s_2}: r_1 r_2 r_3 \emptyset$ ではなく $\succ'_{s_2}: r_2 r_1 r_3 \emptyset$ と嘘の申告をしたとする。

$$\succ_{s_1}: r_1 r_2 r_3 \emptyset \quad \succ_{r_1}: s_1 s_2 s_3 s_4 \emptyset$$

$$\succ_{s_2}: r_2 r_1 r_3 \emptyset \quad \succ_{r_2}: s_1 s_2 s_3 s_4 \emptyset$$

$$\succ_{s_3}: r_2 r_1 r_3 \emptyset \quad \succ_{r_3}: s_2 s_3 s_4 s_1 \emptyset$$

$$\succ_{s_4}: r_3 r_2 r_1 \emptyset$$

ここで一人一役立候補を使い、三役を選出すると次のようになる。

ステップ 1 s_1 は、役職 r_1 に立候補する。

s_2 と s_3 は、役職 r_2 に立候補する。

s_4 は、役職 r_3 に立候補する。

ステップ 2 r_1 にとって、 s_1 のほうが \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_1)=s_1$ となる

r_2 にとって、 s_2 のほうが s_3 より望ましいので、 $\mu(r_2)=s_2$ となる。

r_3 にとって、 s_4 のほうが \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_3)=s_4$ となる。

s_3 は役職に就くことができなかったので、 $\mu(s_3) = \emptyset$ となる。

立候補者と役職の組み合わせは、 (s_1, r_1) 、 (s_2, r_2) 、 (s_4, r_3) となった。

s_2 は、本来役職につくことができなかったが、嘘の申告をすることによって役職 r_2 に就くことができた。すなわち、嘘の申告によって、自分にとって望ましい結果を引き寄せることができたのである。よって、立候補者 s_2 、その真の選好 \succ_{s_2} 、他者の選好組 \succ_{-s_2} 、ある偽の選好 $\succ'_{s_2} \neq \succ_{s_2}$ について

$$F_{s_2}(\succ_{s_2}, \succ_{-s_2}) <_{s_2} F_{s_2}(\succ'_{s_2}, \succ_{-s_2})$$

が成り立つ。すなわち、一人一役立候補制は、立候補者側耐戦略性を満たさない。

3.2 落選者再立候補制

一般的に使われているもう一つの選出ルールを落選者再立候補制と呼ぶことにする。この制度のもとでは、次の三ステップで結果が決まる。

ステップ 1 r_1 に就きたい人を募集する。もし、立候補者が複数いた場合、選挙によって、 r_1 に就く者を決める。

ステップ 2 r_2 に就きたい人を募集する。ここで r_1 の選挙で落選した人も立候補できる。

もし、立候補者が複数いた場合、選挙によって、 r_2 に就く者を決める。

ステップ 3 r_3 に就きたい人を募集する。ここで r_1 の選挙で落選した人、 r_2 の選挙で落選した人、またはその両方で落選した人も立候補できる。もし、立候補者が複数いた場合、選挙によって、 r_3 に就く者を決める。

いま $r_1 r_2 r_3$ の順番で決めることにしたが、必ずしもこの順番でなくてもよい。立候補者は、その時点で残っている役職のうち、最も高い順序を付けている役職のみに立候補するものとする。

例 3.2 それぞれ立候補者、役職の選好が以下の通りだったとする。

$$\begin{aligned}
\succ_{s_1}: r_1 r_2 r_3 \emptyset & & \succ_{r_1}: s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 \emptyset \\
\succ_{s_2}: r_1 r_2 r_3 \emptyset & & \succ_{r_2}: s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 \emptyset \\
\succ_{s_3}: r_2 r_1 r_3 \emptyset & & \succ_{r_3}: s_2 s_3 s_1 s_4 s_5 \emptyset \\
\phantom{\succ_{s_3}: r_2 r_1 r_3 \emptyset} & & \\
\phantom{\succ_{s_3}: r_2 r_1 r_3 \emptyset} & & \succ_{s_4}: r_2 r_1 r_3 \emptyset \\
\phantom{\succ_{s_3}: r_2 r_1 r_3 \emptyset} & & \\
\phantom{\succ_{s_3}: r_2 r_1 r_3 \emptyset} & & \succ_{s_5}: r_3 r_1 r_2 \emptyset
\end{aligned}$$

r_1, r_2, r_3 をどの順番で決めていくかによって、導かれるマッチングは異なりうることを例で示す。

① $r_1 r_2 r_3$ の順番で決める場合

- ステップ 1 s_1 と s_2 は、役職 r_1 に立候補する。
 r_1 にとって、 s_1 のほうが s_2 より望ましいので、 $\mu(r_1)=s_1$ となる。
- ステップ 2 s_2, s_3, s_4 は、役職 r_2 に立候補する。
 r_2 にとって、 s_2, s_3, s_4 の中で s_2 が最も望ましいので、 $\mu(r_2)=s_2$ となる。
- ステップ 3 s_3, s_4, s_5 は、役職 r_3 に立候補する。
 r_3 にとって、 s_3, s_4, s_5 の中で s_3 が最も望ましいので、 $\mu(r_3)=s_3$ となる。
 s_4 は役職に就くことができなかったので、 $\mu(s_4) = \emptyset$ となる。
 s_5 は役職に就くことができなかったので、 $\mu(s_5) = \emptyset$ となる。
- 立候補者と役職の組み合わせは、 $(s_1, r_1), (s_2, r_2), (s_3, r_3)$ となった。

② $r_3 r_2 r_1$ の順番で決める場合

- ステップ 1 s_5 は、役職 r_3 に立候補する。
 r_3 にとって、 s_5 のほうが \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_3)=s_5$ となる
- ステップ 2 s_3, s_4 は、役職 r_2 に立候補する。
 r_2 にとって、 s_3 のほうが s_4 より望ましいので、 $\mu(r_2)=s_3$ となる
- ステップ 3 s_1, s_2, s_4 は、役職 r_1 に立候補する。
 r_1 にとって、 s_1, s_2, s_4 の中で s_1 が最も望ましいので、 $\mu(r_1)=s_1$ となる。
 s_2 は、役職に就くことができなかったので、 $\mu(s_2) = \emptyset$ となる。
 s_4 は、役職に就くことができなかったので、 $\mu(s_4) = \emptyset$ となる。
- 立候補者と役職の組み合わせは、 $(s_1, r_1), (s_3, r_2), (s_5, r_3)$ となった。

確かに、①と②の例から、 r_1, r_2, r_3 をどの順番で決めていくかによって、マッチングのペアが異なりうる。すなわち、決めていく順番が結果に影響を与えてしまう。

この選出ルールが、個人合理性を満たすことは自明である。次に、この選出ルールが安定性、立候補者側耐戦略性を満たさないことを示す。

定理 3.21 落選者再立候補制は、安定性を満たさない。

証明. ②の例で証明する。安定性を満たさないことを示すには、 $s_i \succ_{r_j} \mu(r_j)$ かつ $r_j \succ_{s_i} \mu(s_i)$ となるペアが存在することを示せばよい。上の例において、 (s_2, r_2) は、 $s_2 \succ_{r_2} \mu(r_2)$ かつ $r_2 \succ_{s_2} \mu(s_2)$ となるペアである。よって、一人一役立候補制は、安定性を満たさない。

定理 3.22 落選者再立候補制は、立候補者側耐戦略性を満たさない。

証明. ②の例で証明する。落選者再立候補制が立候補者側耐戦略性を満たさないことを示すには、ある立候補者 s_i 、その真の選好 \succsim_{s_i} 、他者の選好組 \succsim_{-s_i} 、ある偽の選好 $\succsim'_{s_i} \neq \succsim_{s_i}$ について

$$F_{s_i}(\succsim_{s_i}, \succsim_{-s_i}) <_{s_i} F_{s_i}(\succsim'_{s_i}, \succsim_{-s_i})$$

が成り立つこと示せばよい。いま s_2 が真の選好 $\succsim_{s_2}: r_1 r_2 r_3 \emptyset$ ではなく $\succsim'_{s_2}: r_2 r_1 r_3 \emptyset$ と嘘の申告をしたとする。

$$\succsim_{s_1}: r_1 r_2 r_3 \emptyset \quad \succsim_{r_1}: s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 \emptyset$$

$$\succsim_{s_2}: r_2 r_1 r_3 \emptyset \quad \succsim_{r_2}: s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 \emptyset$$

$$\succsim_{s_3}: r_2 r_1 r_3 \emptyset \quad \succsim_{r_3}: s_2 s_3 s_1 s_4 s_5 \emptyset$$

$$\succsim_{s_4}: r_2 r_1 r_3 \emptyset$$

$$\succsim_{s_5}: r_3 r_1 r_2 \emptyset$$

ステップ1 s_5 は、役職 r_3 に立候補する。

r_3 にとって、 s_3 は \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_3)=s_5$ となる

ステップ2 s_2, s_3, s_4 は、役職 r_2 に立候補する。

r_2 にとって、 s_2, s_3, s_4 の中で、 s_2 が最も望ましいので、 $\mu(r_2)=s_2$ となる。

ステップ3 s_1, s_3, s_4 は、役職 r_1 に立候補する。

r_1 にとって、 s_1, s_3, s_4 の中で、 s_1 が最も望ましいので、 $\mu(r_1)=s_1$ となる。

立候補者と役職の組み合わせは、 (s_1, r_1) 、 (s_2, r_2) 、 (s_5, r_3) となった。 s_2 は嘘の申告をすることによって、本来役職につくことができなかったが、役職 r_2 に就き、より望ましい結果を引き寄せることができた。すなわち、立候補者 s_2 、選好 \succsim_{s_2} 、他者の選好組 \succsim_{-s_2} 、選好 $\succsim'_{s_2} \neq \succsim_{s_2}$ について

$$F_{s_2}(\succsim_{s_2}, \succsim_{-s_2}) <_{s_2} F_{s_2}(\succsim'_{s_2}, \succsim_{-s_2})$$

が成り立つ。よって落選者再立候補制は、立候補制耐戦略性を満たさない。

4章 望ましい選出ルールの提言

4.1 DA アルゴリズム選出ルール

DA アルゴリズムとはデイヴィット・ゲールとロイド・シャプレーによってつくられたディファード・アクセプタンス・アルゴリズム (Deferred Acceptance Algorithm) の略称である。我々が提言する DA アルゴリズムについて、以下でその仕組みを、例を用いて説明する。ここでの DA アルゴリズムには、二種類ある。立候補者側から提案する DA アルゴリズムを立候補者側 DA アルゴリズム、役職側から提案する DA アルゴリズムを役職側 DA アルゴリズムである。この二つはどちらかが「提案する側⁵」になるかが異なるだけで、構造自体は同じである。

例 4.1 それぞれ立候補者、役職の選好が以下の通りだったとする⁶。

$$\begin{aligned} \succ_{s_1}: r_1 r_2 r_3 \emptyset & & \succ_{r_1}: s_2 s_3 s_1 s_4 \emptyset \\ \succ_{s_2}: r_2 r_1 r_3 \emptyset & & \succ_{r_2}: s_4 s_3 s_2 s_1 \emptyset \\ \succ_{s_3}: r_1 r_3 r_2 \emptyset & & \succ_{r_3}: s_3 s_4 s_2 s_5 s_1 \emptyset \\ \succ_{s_4}: r_1 r_3 r_2 \emptyset & & \\ \succ_{s_5}: r_3 \emptyset r_1 r_2 & & \end{aligned}$$

(i) 立候補者側 DA アルゴリズム

- ステップ 1 s_1 と s_3 と s_4 は、一番就きたい役職 r_1 に立候補する。
 r_1 にとって、 s_1 、 s_3 、 s_4 のなかで s_3 が最も望ましいので、 $\mu(r_1)=s_3$ となる
 s_2 は、一番就きたい役職 r_2 に立候補する。
 r_2 は、 \emptyset より s_2 を選好しているので、 $\mu(r_2)=s_2$ となる。
 s_5 は、一番就きたい役職 r_3 に立候補する。
 r_3 にとって、 s_5 のほうが \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_3)=s_5$ となる
- ステップ 2 s_1 は、役職 r_2 に立候補する。
 r_2 にとって、 s_2 のほうが s_1 より望ましいので、 $\mu(r_2)=s_2$ のままである。
 s_4 は、役職 r_3 に立候補する。
 r_3 にとって、 s_4 のほうが s_5 より望ましいので、 $\mu(r_3)=s_4$ となる。
 s_5 は、役職に就くことができなかったので、 $\mu(s_5) = \emptyset$ となる
- ステップ 3 s_1 は、役職 r_3 に立候補する。
 r_3 にとって、 s_4 のほうが s_1 より望ましいので、 $\mu(r_3)=s_4$ のままである。
 s_1 は、役職に就くことができなかったので、 $\mu(s_1) = \emptyset$ となる

⁵立候補者が提案するとき、「立候補する」と呼ぶことにする。役職が提案するとき、「指名する」と呼ぶことにする。

⁶ \succ_{r_1} と \succ_{r_2} において、 s_5 の順序付けがなされていない。根拠は6章を参照。

以上でステップは終了となる。立候補者と役職の組み合わせは、 (s_3, r_1) 、 (s_2, r_2) 、 (s_4, r_3) となった。

(ii) 役職側 DA アルゴリズム

ステップ 1 r_1 は、最も望ましい立候補者 s_2 を指名する。
 s_2 にとって、 r_1 のほうが \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_1) = s_2$ となる。
 r_2 は、最も望ましい立候補者 s_4 を指名する。
 s_4 にとって、 r_2 のほうが \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_2) = s_4$ となる。
 r_3 は、最も望ましい立候補者 s_3 を指名する。
 s_3 にとって、 r_3 のほうが \emptyset より望ましいので、 $\mu(r_3) = s_3$ となる。

以上でステップは終了となる。立候補者と役職の組み合わせは、 (s_2, r_1) 、 (s_4, r_2) 、 (s_3, r_3) となった。

このようにどちらが提案するかで、導きだされるペアが異なる場合がある。立候補側 DA マッチングでは、立候補者側にとって安定的なマッチング⁷の中で最適であり、役職側 DA マッチングでは、役職側にとって安定的なマッチングの中で最適であることが知られている⁸。平易に言えば、提案する側が得ということである。

4.2 DA アルゴリズムの望ましい点

定理 4.21 任意の \succeq に対しても、DA アルゴリズムにより定義されるマッチング μ は、 \succeq のもとで安定的である⁹。

証明. マッチング μ が個人合理的であり、かつ μ をブロックするペアが存在しないことを示せばよい。すなわち、どのような (s_i, r_j) も次の条件を満たさないことを示せばよい。

$$s_i \succ_{r_j} \mu(r_j) \text{ かつ } r_j \succ_{s_i} \mu(s_i)$$

任意の \succeq について考える。アルゴリズムの定義からマッチング μ が個人合理的であることは自明である。いま (s_i, r_j) について、 $r_j \succ_{s_i} \mu(s_i)$ が成り立つものとしよう。立候補者アルゴリズムの定義より、立候補者 s_i はどこかのステップで、 r_j に拒否されていることになる。この、 s_i が r_j に拒否されたステップで、(i) r_j は誰か別の立候補者 $s_i = s'_i$ をキープするか、(ii) 誰もキープしない選んだわけである。

(i) のケースでは、 $s'_i \succ_{r_j} s_i$ である。また、立候補者側 DA アルゴリズムのもとでは、役職がキープする立候補者はステップが進むにつれて改善されるか現状維持のいずれかなので

$$\mu(r_j) \succeq_{r_j} s'_i$$

であり、よって

$$\mu(r_j) \succ_{r_j} s_i$$

となる。

⁷ DA アルゴリズムが安定的なマッチングを導くことは定理 4.11 で証明。

⁸ Gale and Shapley(1962) を参照

⁹ Gale and Shapley(1962) を参照

(ii) のケースでは、 $\emptyset \succ_{r_j} s_i$ である。そして、 μ の個人合理性より $\mu(r_j) \succeq_{r_j} \emptyset$ が成り立つので

$$\mu(r_j) \succ_{r_j} s_i$$

となる。以上の議論から、 $r_j \succ_{s_i} \mu(s_i)$ が成り立つならば、いずれのケースにおいても必ず $\mu(r_j) \succ_{r_j} s_i$ が成り立つことが分かった。よって、 \succeq のもとでは、どのような (s_i, r_j) も μ をブロックできない。

定理 4.22 立候補者側 DA アルゴリズムにより定義されるマッチングルールは、立候補者側耐戦略性を満たす¹⁰。

証明. 任意の立候補者 s_i について、真の選好 \succeq_{s_i} を表明した場合、DA アルゴリズムで就いた役職を r_k とする。すなわち、 $\mu(r_k) = s_i$ が成り立つものとする。 s_i が、嘘の申告 $\succeq'_{s_i} \neq \succeq_{s_i}$ を表明したとき、就いた役職を r'_k とする。ここで、つねに $r_k \succeq_{s_i} r'_k$ が成り立つことをしめせばよい。次の2つのケースに分けて考える。(i) r_k が \succeq_{s_i} のなかで最も望ましいものだったとき。(ii) \succeq_{s_i} において、 r_k より望ましい r_k^* が存在するとき。(i) のとき、これ以上望ましい役職は存在しないので、 $r_k \succeq_{s_i} r'_k$ はつねに成り立つ。(ii) のとき、DA アルゴリズムでは r_k^* を希望しているが、 $\succeq_{r_k^*}$ において s_i より望ましい立候補者 $s'_i (\neq s_i)$ が r_k^* を希望していて、 s_i は拒否されたことになる。よって、 \succeq_{s_i} において、 r_k^* の選好順位を入れ替えてどのような \succeq'_{s_i} を表明したとしても、 s_i は r_k^* に就くことはできない。また、 \succeq'_{s_i} を表明することで就いた職 r'_k は、 r_k と一致する。すなわち、(ii) のときも、つねに $r_k \succeq_{s_i} r'_k$ が成り立つ。また、 \succeq_{s_i} において、 r_k より望ましくない r^- を r_k より高い選好順位につけた \succeq''_{s_i} を考える。 \succeq''_{s_i} を表明した場合、 r_k より望ましくない r^- に就いてしまう可能性がある。よって、 s_i は \succeq''_{s_i} を表明するようなインセンティブを持たない。すなわち、つねに $r_k \succeq_{s_i} r'_k$ が成り立つ。以上より、立候補者側 DA アルゴリズムにより定義されるマッチングルールは、立候補者側耐戦略性を満たす。

定理 4.23 役職側 DA アルゴリズムにより定義されるマッチングルールは、役職側耐戦略性を満たす。

証明. 定理 4.22 と同様に証明できる。

4.3 どちら側の DA アルゴリズムを使うべきか

DA アルゴリズムは、両側耐戦略性を満たさない。すなわち、立候補者側から提案する DA アルゴリズムでは、役職側耐戦略性を満たさない。一方、役職側から提案する DA アルゴリズムでは、立候補者側耐戦略性を満たさない。ここでどちらの側の耐戦略性を満たすべきかを考える。役職側の選好は、投票によって決まるものである。つまり個人の意思の集約によって決まるものであるから、戦略的操作は難しいと考えるのが妥当である。一方、立候補者の選好は、立候補者個人によって決まるものであり、戦略的操作が容易である。それゆえ、重視すべきは、立候補者側耐戦略性である。よって、立候補者側から提案する DA アルゴリズムを使うのが望ましいだろう。

¹⁰ Dubins and Freedman(1981) と Roth(1982) を参照。

5章 選出ルールの比較

2.2 で挙げた望ましさの基準といままで挙げた選出ルールについて表にまとめた。望ましさの基準を満たす場合には○を、満たさない場合は×を記入した。

	個人合理性	安定性	立候補者側耐戦略性
一人一役立候補制	○	×	×
落選者再立候補制	○	×	×
立候補者側 DA 選出	○	○	○

表からも見て取れるように、立候補者側 DA アルゴリズム選出ルールのみ、望ましさの基準を三つとも満たしている。よって、クラス三役を選出する際には、立候補者側 DA アルゴリズム選出ルールを使うのがよい。

6章 Priority Ordering について

6.1 投票対象の違いによるマッチングへの影響

2章において、有権者の priority ordering は、おおよそ民主的であろう集約ルールでの選挙によって決まるものと定めた。

例 6.1 それぞれ立候補者、役職の選好が以下の通りだったとする。

$$\begin{aligned} \succ_{s_1}: r_1 r_2 r_3 \emptyset & & \succ_{r_1}: s_1 s_2 s_3 s_4 \emptyset \\ \succ_{s_2}: r_1 r_2 \emptyset r_3 & & \succ_{r_2}: s_3 s_4 s_1 s_2 \emptyset \\ \succ_{s_3}: r_3 r_2 r_1 \emptyset & & \succ_{r_3}: s_3 s_4 s_2 s_1 \emptyset \\ \succ_{s_4}: r_3 r_1 r_2 \emptyset & & \end{aligned}$$

これについて、DA アルゴリズムを用いると、 (s_1, r_1) , (s_4, r_2) , (s_3, r_3) のマッチングが成立する。ここで \succ_{s_2} に注目すると、 s_2 は「役職 r_3 に就くなら、無職 (\emptyset) のほうがまだよい」と考えていることが分かる。このような個人 s_2 のことを r_3 における「ダミー立候補者」と呼ぶことにする。DA アルゴリズムで得られるマッチングは立候補者個人合理性が満たされているため、 s_2 が役職 r_3 に就くことはない。したがって、選挙によって \succ_{r_3} を決定する際、投票対象として s_2 を含めるか否かが一つの争点となる。以降、おおよそ民主的であろう集約ルールとして、多数決とボルダルールの二つを例に取り、上記の選好において、選挙によって \succ_{r_3} を決定する際、投票対象として s_2 を含める場合と含めない場合で、マッチング結果がどのように変化するか説明していく。

はじめに二つの集約ルールを定義する。

多数決とは、全ての有権者 v_l ($l = 1, 2, \dots, n$) が、役職 r_j における投票対象の内、一番望ましいと考えている立候補者一人に一票を投じ、合計得票数が高い順に \succ_{r_j} とする集約ルールである。

ボルダルールとは、全ての有権者 v_l ($l = 1, 2, \dots, n$) が、役職 r_j における $\bar{m} (\leq m)$ 人の投票対象の内、 k ($k = 1, 2, \dots, \bar{m}$) 番目に選好している立候補者それぞれに $(p - k)$ 点 (p は任意の定数) を付け、合計点数 (「ボルダ得点」と呼ぶ) が高い順に \succ_{r_j} とする集約ルールである。

いま、集約ルールによって、役職 r_3 の選好順序を決定する状況を考えたい。

有権者が以下の表のような個人的選好を持つ 10 人からなると仮定する。

表の見方としては、例えば「 $s_3 s_2 s_4 s_1$ の順で役職 r_3 についての選好を持つ個人が 4 人いる」という具合である。なお、点はボルダルールで用いるものである。

	4 人	3 人	2 人	1 人
1 位 (3 点)	s_3	s_4	s_2	s_1
2 位 (2 点)	s_2	s_3	s_4	s_4
3 位 (1 点)	s_4	s_1	s_3	s_2
4 位 (0 点)	s_1	s_2	s_1	s_3

集約ルールとして多数決を用いた場合、1位の行を参照して合計得票数を求めればよい。すなわち、 s_3 が4票、 s_4 が3票、 s_2 が2票、 s_1 が1票であるから、 $\succsim_{r_3}: s_3 s_4 s_2 s_1$ が得られる。

集約ルールとしてボルダルールを用いた場合、各ボルダ得点 $P^B(\cdot)$ は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} P^B(s_1) &= 0 \times 4 + 1 \times 3 + 0 \times 2 + 3 \times 1 = 6 \\ P^B(s_2) &= 2 \times 4 + 0 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 15 \\ P^B(s_3) &= 3 \times 4 + 2 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 20 \\ P^B(s_4) &= 1 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1 = 19 \end{aligned}$$

すなわち、 $P^B(s_3) > P^B(s_4) > P^B(s_2) > P^B(s_1)$ であるから、 $\succsim_{r_3}: s_3 s_4 s_2 s_1$ が得られる。

この状況では、投票対象は s_1, s_2, s_3, s_4 の立候補者4人であった。しかし、上記の通り、 s_2 が役職 r_3 に就くことはないため、投票対象を s_1, s_3, s_4 の立候補者3人に絞った上で選挙を行うことは十分妥当な方針だと考えられる。ここまでと同じ有権者10人を仮定して、上の表から s_2 を除き、 s_1, s_3, s_4 からなる選好の表を書く以下通りである。

	4人	3人	2人	1人
1位 (2点)	s_3	s_4	s_4	s_1
2位 (1点)	s_4	s_3	s_3	s_4
3位 (0点)	s_1	s_1	s_1	s_3

この場合、集約ルールとして多数決を用いた場合、 s_4 が5票、 s_3 が4票、 s_1 が1票であるから、 $\succsim'_{r_3}: s_4 s_3 s_1$ が得られる。

集約ルールとしてボルダルールを用いた場合、各ボルダ得点 $P^{B'}(\cdot)$ は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} P^{B'}(s_1) &= 0 \times 4 + 0 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1 = 2 \\ P^{B'}(s_3) &= 2 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 13 \\ P^{B'}(s_4) &= 1 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 15 \end{aligned}$$

すなわち、 $P^{B'}(s_4) > P^{B'}(s_3) > P^{B'}(s_1)$ であるから、 $\succsim'_{r_3}: s_4 s_3 s_1$ が得られる。この社会的順序を用いて、それぞれの選好を書きなおすと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \succsim_{s_1}: r_1 r_2 r_3 \emptyset & \quad \succsim_{r_1}: s_1 s_2 s_3 s_4 \emptyset \\ \succsim_{s_2}: r_1 r_2 \emptyset r_3 & \quad \succsim_{r_2}: s_3 s_4 s_1 s_2 \emptyset \\ \succsim_{s_3}: r_3 r_2 r_1 \emptyset & \quad \succsim'_{r_3}: s_4 s_3 s_1 \emptyset \\ \succsim_{s_4}: r_3 r_1 r_2 \emptyset & \end{aligned}$$

これについて、DAアルゴリズムを用いると、 (s_1, r_1) , (s_3, r_2) , (s_4, r_3) のマッチングが成立する。すなわち、投票対象として s_2 を含めるとマッチングの結果が変わってしまう。

いま、多数決とボルダルールを例にとり、DA アルゴリズムにおいてマッチングされない立候補者を投票対象から除外したことで、役職の選好順序が変わり、ひいてはマッチングの結果が変わることを示したが、これら二つの集約ルール以外のいかなるおおよそ民主的な集約ルール¹¹を用いても同様の変化が起こりうる。これは次の定理から示すことができる。

定理 6.1 二項独立性を満たす集約ルールは、独裁制か逆独裁制のみである¹²。

二項独立性は、「選択肢 X と Y の対決に、他のあらゆる選択肢 Z が一切の影響をあたえないこと」を要求する。例 3.2 では、選択肢 s_3 と s_4 の対決に、 s_2 が影響を与えてしまっている。おおよそ民主的な集約ルールは、二項独立性を満たさない。

6.2 ダミー立候補者を投票対象に含めるべきか

結論から言えば、投票対象に含めるべきでない。DA アルゴリズムは、個人合理性を満たす。よって、ある役職にとって、ダミー立候補者が最も望ましい人であっても、マッチングされることはない。ダミー立候補者が、投票の対象となってしまうと、選挙の結果に影響を与え、マッチングの結果をかき乱してしまう可能性がある。その意味において、ダミー立候補者をその役職の投票対象にすべきでない。

¹¹ おおよそ民主的な集約ルールに含まれないものとして、例えば、独裁制（特定の個人の選好がそのまま社会的選好と一致するルール）、逆独裁制（特定の個人の選好と真逆の選好が社会的選好と一致するルール）、無為（常に全選択肢が同順位であるとする、実質的に何も判断を下さないルール）などが挙げられる。

¹² Murakami (1968) を参照。

7章 おわりに

本稿では、クラスで複数の役職を同時に選出する場合において、個人合理性・安定性・立候補者耐戦略性の観点から立候補者側 DA アルゴリズム選出ルールを提言した。このような手法がクラス三役の選出において用いられることで、各立候補者は嘘をつかずに正直な申告を行って、立候補者にとってもクラス全体にとっても望ましい役職の決定を実現できるだろう。

加えて、クラスの社会的順序を集約するうえでは、特定の役職につく気のない人は投票対象から除くこととした。なぜなら、ダミー立候補が投票対象に含まれることで選挙の結果に影響が生じ、マッチングの結果を歪めてしまう恐れがあるからだ。

本稿では、役職の数を代表、副代表、書記の三つとした。本稿での議論は、役職の数がいくつであっても成り立つ。また、特定の役職に複数人就任可能な場合でも同様の議論が可能である¹³。

応用例を一つ挙げる。野球のポジション決めだ。各選手は、つきたいポジションを順序付けて表明する。監督側は、各ポジションについて望ましい選手を順序付けて表明する。これらに対して、DA アルゴリズムを用いてマッチングを行えばよい。

参考文献

- [1] 坂井豊貴, 藤中裕二, 若山琢磨 (2008) 「メカニズムデザイン—資源配分制度の設計とインセンティブ」 第 7 章. ミネルヴァ書房.
- [2] 坂井豊貴 (2010) 「マーケットデザイン入門—オークションとマッチングの経済学」 第 5 章, 第 7、8 章. ミネルヴァ書房.
- [3] 坂井豊貴 (2013) 「マーケットデザイン最先端の実用的な経済学」 第二章. ちくま新書.
- [4] 坂井豊貴(2015) 「多数決を疑う」 第四章、岩波新書.
- [5] Dubins, L.E. and Freedman, D.A.(1981) “Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm,” *American Mathematical Monthly* Vol. 88, pp. 485-494.
- [6] Gale, D. and Shapley, L.(1962) “College Admissions and the Stability of Marriage,” *American Mathematical Monthly* Vol. 69, pp. 9-15.
- [7] Roth, A.E.(1982) “The Economics of Matching: Stability and Incentives,” *Mathematics of Operations Research* Vol. 7, pp. 617-628
- [8] Arrow,K.J.(1963) *Social Choice and Individuals Values*, 2nd edition, Yale University Press.
- [9] Murakami, Y.(1968) *Logic and Social Choice*, Routledge.

¹³ 一対複数マッチングに関しては、坂井(2010)第八章を参照。